Kurven konstanter Breite und Schiebkurven

Müller, Hans Robert

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 26, 1976, S.119-122

Verlag Erich Goltze KG, Göttingen

Kurven konstanter Breite und Schiebkurven

von **Hans Robert Müller**

Raumkurven konstanter Breite sind doppelpunktfreie geschlossene Kurven des R^3 mit folgender Eigenschaft: Die Normalebene jedes Kurvenpunktes P schneidet die Kurve in genau einem weiteren Punkt $\bar{P}$, wobei der Abstand $|P\bar{P}|$ fest ist. Diese Definition geht auf *M. Fujiwara* [1] und *W. Blaschke* [2] zurück und stellt eine Verallgemeinerung der ebenen Kurven konstanter Breite dar. Eine andere Verallgemeinerung und Verschärfung des Begriffes stammt von *S. A. Robertson* [3]. Er erklärt allgemeiner für Untermannigfaltigkeiten euklidischer Räume eine konstante Breite durch Einführung des Begriffes der Transnormalität. Auf Raumkurven angewandt, führt dies zur Definition: Eine transnormale Raumkurve ist eine geschlossene Kurve des R^3, die von jeder ihrer Normalebenen höchstens senkrecht geschnitten wird. Man erkennt leicht, daß jede solche Kurve eine Raumkurve konstanter Breite im Sinne von *Fujiwara* ist. Für ebene Kurven decken sich beide Definitionen.

In Modifikation dieser Erklärungen der Kurven konstanter Breite betrachten wir *doppelpunktfreie C^3-Kurven γ des R^3 mit der Eigenschaft, daß zu jedem Kurvenpunkt* $P \in \gamma$ *genau ein Gegenpunkt* $\bar{P} \in \gamma$ *in festem Abstand* $|P\bar{P}| = d$ *so existiert, daß* a) *die im Durchlaufungssinn von γ orientierten Tangenten in den Punkten* P *und* $\bar{P}$ *entgegengesetzt gerichtet sind, und* b) *das sphärische Tangentenbild γ_1 von γ eine geschlossene Kurve vom Umfang* $U_1 = 2\,S$ *sei. Durch die Bogenlänge s_1 von γ_1 werde γ regulär parametrisiert.*

Bezeichnen wir mit $\mathfrak{t}$ den Tangenteneinheitsvektor an γ in P, so wird γ_1 von $\mathfrak{t}$ als Ortsvektor beschrieben und ist wegen a) zentrisch symmetrisch. γ_1 kann als Raumkurve der konstanten Breite $d_1 = 2$ im Sinne von Fujiwara aufgefaßt werden.

Zum Punkt P gehöre der Ortsvektor $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(s_1)$, $\bar{P}$ wird dann durch $\bar{\mathfrak{x}} := \mathfrak{x}(s_1 + S)$ erfaßt. Wir beschränken uns vorerst auf eine Durchlaufung von $\gamma_1 : 0 \leqq s_1 \leqq 2S$. Es seien $\mathfrak{h}$ und $\mathfrak{b}$ die Einheitsvektoren in Richtung von Haupt- bzw. Binormale von γ. Es bilden somit $\mathfrak{t}, \mathfrak{h}, \mathfrak{b}$ das begleitende Dreibein, dessen Ableitungsgleichungen (Formeln von *Frenet*) die Gestalt annehmen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\mathfrak{t}}{ds_1} &= \mathfrak{h} \\ \frac{d\mathfrak{h}}{ds_1} &= -\mathfrak{t} + k\,\mathfrak{b} \\ \frac{d\mathfrak{b}}{ds_1} &= -k\mathfrak{h} \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Bedeuten $\varkappa = \frac{1}{\rho}$ und τ die Krümmung bzw. Torsion von γ in P, so ist $k = \rho\tau$ die konische Krümmung. Unsere Forderungen bewirken

$$\bar{\mathfrak{t}} := \mathfrak{t}(s_1 + S) = -\mathfrak{t}(s_1), \tag{2}$$

$$\frac{d\mathfrak{x}}{ds_1} = \frac{d\mathfrak{x}}{ds} \cdot \frac{ds}{ds_1} = \rho . \mathfrak{t}, \tag{3}$$

$$(\bar{\mathfrak{x}} - \mathfrak{x})^2 = [\mathfrak{x}(s_1 + S) - \mathfrak{x}(s_1)]^2 = d^2. \tag{4}$$

Daraus schließen wir sofort mit (1):

$$\begin{gathered} \bar{\mathfrak{h}} := \mathfrak{h}(s_1 + S) = -\mathfrak{h}(s_1), \quad \bar{\mathfrak{b}} := \mathfrak{b}(s_1 + S) = +\mathfrak{b}(s_1), \\ \bar{\mathfrak{k}} := \mathfrak{k}(s_1 + S) = -\mathfrak{k}(s_1). \end{gathered} \tag{5}$$

Aus (4) folgt durch Ableitung nach s_1

$$(\bar{\mathfrak{x}} - \mathfrak{x})(\bar{\rho} + \rho)\,\mathfrak{t} = 0. \tag{6}$$

Hierbei wurden zur Abkürzung $\bar{\rho} := \rho(s_1 + S)$ gesetzt und (1), (2) und (3) berücksichtigt. Es bieten sich nun zwei Möglichkeiten an:

I) Das Verschwinden des Skalarproduktes

$$(\bar{\mathfrak{x}} - \mathfrak{x})\,\mathfrak{t} = 0 \tag{7}$$

führt auf die Bedingung von *Fujiwara* für Raumkurven konstanter Breite. Der Punkt $\bar{P}$ liegt wegen (7) nämlich in der Normalebene von γ im Punkte P. Erteilen wir dem Parameter s_1 nun den Wert $s_1 + S$, so gelangen wir zu $\bar{P}$ und dem zugeordneten Punkt $\bar{\bar{P}}$ (entsprechend dem Parameterwert $s_1 + 2S$). Wiederum gilt, daß auch $\bar{\bar{P}}$ in der Normalebene von $\bar{P}$ liegt. Da einem Punkt aber genau ein Gegenpunkt entspricht, muß $\bar{\bar{P}}$ mit P zusammenfallen, die Kurve γ also geschlossen sein.

II) Durch die Bedingung

$$\bar{\rho} + \rho = \rho(s_1 + S) + \rho(s_1) = 0 \tag{8}$$

gelangen wir zu einer Kurvenklasse, die wir kurz betrachten wollen. Nun gilt auch

$$\bar{\varkappa} := \varkappa(s_1 + S) = -\varkappa(s_1), \quad \bar{\tau} := \tau(s_1 + S) = +\tau(s_1). \tag{9}$$

Die Integration von (3) liefert als Integraldarstellung von γ (vgl. [4])

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(s_1) = \int_0^{s_1} \rho(\sigma) . \mathfrak{t}(\sigma)\, d\sigma. \tag{10}$$

Hieraus wegen (2) und (8)

$$\vartheta := \bar{\mathfrak{x}} - \mathfrak{x} = \int_0^{s_1+S} \rho \cdot \mathfrak{t}\, d\sigma - \int_0^{s_1} \rho \cdot \mathfrak{t}\, d\sigma = \int_{s_1}^{s_1+S} \rho\mathfrak{t}\, d\sigma = \int_0^S \rho\mathfrak{t}\, d\sigma. \tag{11}$$

γ ist somit eine *Schiebkurve* zum konstanten Schiebvektor ϑ. Es gilt

$$\bar{\mathfrak{x}} = \mathfrak{x}(s_1 + S) = \mathfrak{x}(s_1) + \vartheta. \tag{12}$$

In $0 \leqq s_1 \leqq S$ besitzt $\rho(s_1)$ mindestens eine Nullstelle. Diesem Wert entspricht eine Spitze von γ, an der jeweils eine Umkehr des Durchlaufungssinnes stattfindet, während γ_1 entsprechend wachsenden Werten der Bogenlänge s_1 beschrieben wird.

Lassen wir mehrfache Durchlaufungen des Tangentenbildes γ_1 zu, beschränken wir uns also nicht auf $0 \leqq s_1 \leqq 2S$, so entnehmen wir aus (2) und (8) die Periodizität

$$\mathfrak{t}(s_1 + 2S) = \mathfrak{t}(s_1), \qquad \rho(s_1 + 2S) = \rho(s_1).$$

Die Kurve γ besteht somit aus kongruenten Bogenstücken, die durch Schiebungen um ϑ ineinander übergehen und jeweils einem halben Umlauf von γ_1 entsprechen. Diese Bogenstücke werden abwechselnd in entgegengesetzten Richtungen durchlaufen, wenn $\mathfrak{t}$ ohne Rückläufigkeit das sphärische Bild γ_1 mehrfach beschreibt.

Wolche Schiebkurven lassen sich etwa so erzeugen, daß man ein C^3-Kurvenstück im R^3 vorgibt, das nur die Eigenschaft besitzen muß, im Anfangspunkt A und im Endpunkt B entgegengesetzt gerichtete Tangenten zu besitzen. Durch Wahl des Vektors $\vartheta := \overrightarrow{AB}$ als Schiebvektor und wiederholte Ausübung dieser Schiebungen wird γ mit Spitzen in A, B . . . erzeugt. — γ kann natürlich auch eine ebene Kurve sein, γ_1 ist dann ein Kreis.

Diese Schiebkurven haben mit den Kurven konstanter Breite (Fall I) noch gewisse Eigenschaften gemein: Durch Integration über das Parameterintervall $0 \leqq s_1 \leqq 2S$ ergibt sich in recht trivialer Weise für die gesamte Bogenlänge von γ

$$\int_{s_1=0}^{2S} ds = \int_0^{2S} \rho(s_1)\, ds_1 = \int_0^S \rho\, ds_1 + \int_0^S \bar{\rho}\, ds_1 = 0,$$

für die Gesamtkrümmung von γ

$$\int_{s_1=0}^{2S} \varkappa\, ds = \int_0^{2S} ds_1 = 2S,$$

für die Gesamtwindung von γ

$$\int_{s_1=0}^{2S} \tau\, ds = \int_0^{2S} k\, ds_1 = \int_0^S k\, ds_1 + \int_0^S \bar{k}\, ds_1 = 0.$$

Ein Gegenstück zum Satz von *Barbier-Bückner* ist nicht zu erwarten.

[1] *M. Fujiwara*, On space curves of constant breadth. Tohoku Math. J. *5* (1914) 180 bis 184.
[2] *W. Blaschke*, Über Raumkurven konstanter Breite. Ber. d. Math. Phys. Kl. sächs. Ges. d. Wissensch. Leipzig *66*, (1914) 171—177.
[3] *S. A. Robertson*, Generalized constant width for manifolds. Mich. Math. J. *11* (1964) 97—105.
[4] *K. Strubecker*, Differentialgeometrie I (Berlin 1964) 162ff.